Bí Kíp Công Phá Kì Thi THPT Quốc Gia

Giải Hệ Phương Trình Bằng Máy Tính Fx 570 ES PLUS

Version 2.1 Finally

I, Giới thiệu

Xin chào tất cả các em! Khi các em đang đọc những dòng này là các em đang nắm trên tay bí kíp giải hệ phương trình giúp tăng khả năng lấy điểm thứ 9 của các em một cách dễ dàng hơn. Hi vọng, sau khi đọc xong tài liệu này, các em sẽ cảm thấy Hệ Phương Trình thật đơn giản và không còn thấy sợ câu thứ 9 này nữa.

Ở phiên bản 2.0 này anh sẽ bổ sung, sửa đổi, hoàn thiện, nâng cấp rất nhiều vấn đề của version 1.0

II, Lý do chọn đề tài

Có rất nhiều em gửi thắc mắc tới anh : "tại sao anh lại giải câu hệ như vậy ?" đó cũng là câu hỏi anh đã từng băn khoăn hồi còn ôn thi như các em, mà không một thầy giáo nào giải thích cho anh cả, anh phải tự mò mẫm cho mình 1 lý do, các thầy chỉ dạy cho mình phương pháp làm là chính chứ rất ít khi các thầy giải thích tại sao và thường chỉ đưa ra dấu hiệu là người ta cho thế này thì mình làm thế này.

Nhưng hôm nay, anh sẽ trình bày với các em một hướng đi mới trong việc công pháp điểm thứ 9 này với máy tính fx 570 ES PLUS, đảm bảo học xong các em ở mức Trung Bình – khá chăm chỉ 1 chút cũng sẽ làm được, thực tế là sau khi anh phát hành version 1.0 đã khá nhiều bạn quay lại cảm ơn anh, vì đã làm thành công nhiều hệ phương trình.

III, Yêu cầu chung

1. Có tinh thần Quyết tâm đỗ Đại Học !!!

2. Có kiến thức căn bản sử dụng các phương pháp thế, đưa về phương trình tích, phương pháp hàm số, phương pháp đánh giá...

Ví dụ như:

Đưa về phương trình tích $A.B = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array}\right.$

Phương pháp hàm số: $f(x) = f(y)$ mà hàm f đồng biến (nghịch biến) trên đoạn $[a;b]$ và $x, y \in [a;b]$

Thì phương trình có nghiệm duy nhất là x = y

Phương pháp đánh giá: thường là sử dụng BĐT Cô-Si vì BĐT này có trong SGK lớp 10

Ta có : $\forall a,b \ge 0; a + b \ge 2\sqrt{ab}$

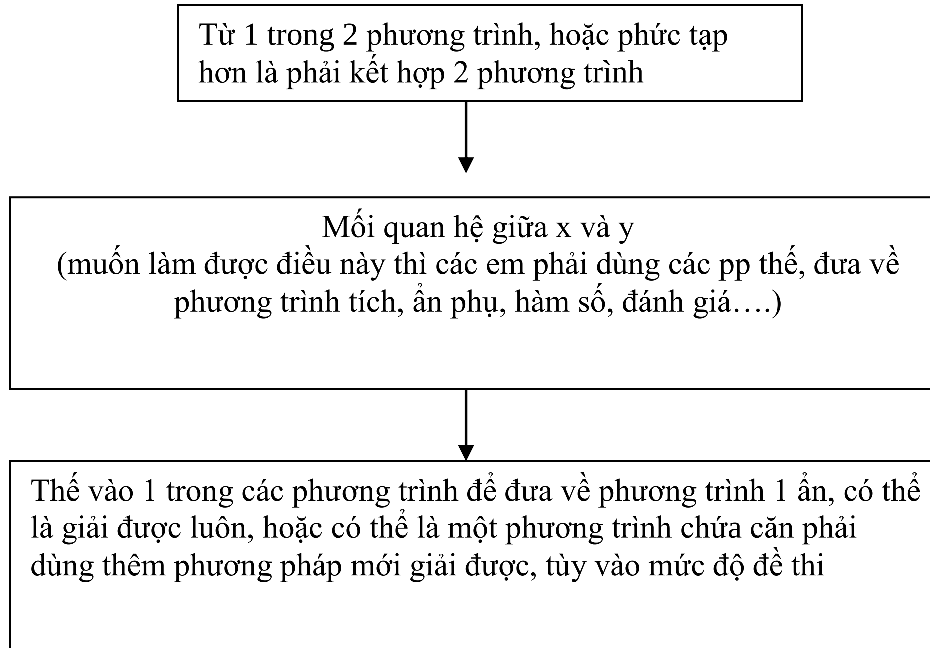
3. Có 1 chiếc máy tính có tính năng SOLVE : fx 570 es plus, fx 570 es, ...

Lý do anh chọn Fx 570 ES PLUS vì đây là máy tính hiện đại nhất được mang vào phòng thi bây giờ và là bản nâng cấp của fx 570 es nên sẽ cho tốc độ cao hơn chút và có một số tính năng mới.

IV, Nội Dung

Anh sẽ hướng dẫn các em công phá tất cả các hệ phương trình từ 2010 cho tới nay bằng máy fx 570 es plus theo cách tự nhiên và dễ hiểu nhất.

*** Đường lối chung để giải 1 hệ phương trình :**



Vậy vai trò của máy ở đây là gì ? Máy tính sẽ giúp ta làm chủ cuộc chơi chứ không phải tác giả nữa, tức là nhờ máy ta sẽ tìm được mối quan hệ ở Bước 2 để áp dụng phương pháp cho thích hợp, tránh hiện tượng "mò", và ở Bước 3 cũng vậy. Vai trò chính là giúp ta định hướng cách làm nhanh hơn.

- **Nội dung chính của tài liệu này:**

(Anh chỉ bám sát nội dung thi, không đi quá xa đà vào những hệ quá khó, quá phức tạp so với đề thi)

Anh sẽ chia ra làm 2 dạng cơ bản :

1. **Từ 1 phương trình là đã tìm luôn được quy luật (90% Đề thi thử và ĐH cho dạng này)**

Biểu hiện: khi cho Y nguyên thì X, X^2 tìm được là số nguyên

2. **Phải kết hợp 2 phương trình thì mới tìm ra được quy luật (một số đề thi thử cho)**

Biểu hiện là cho Y nguyên nhưng được X, X^2 rất lẻ

Muốn tìm được quy luật giữa x và y của dạng này các em cần kết hợp 2 phương trình như cộng trừ 2 vế để khử số hạng tự do.

***Sau khi tìm được mối liên hệ giữa X và Y thế vào 1 phương trình còn lại thì lại có 2 khả năng chính**

a. Bấm máy phương trình ra nghiệm đẹp : vậy là xác suất 90% xử lý được

b. Bấm máy phương trình ra nghiệm xấu:

thường đề ĐH họ chỉ cho nghiệm xấu dạng

$\begin{cases} \sqrt{a} \\ \dfrac{a+\sqrt{b}}{c} \end{cases}$ là những nghiệm của phương trình bậc 2, muốn xử lý được ta phải áp dụng định lý Vi-et đảo, anh sẽ nói rõ trong bài tập.

Với phương pháp này các em có thể xử lý được 90% các hệ trong đề thi thử THPT Quốc Gia và đề thi chính thức, phương pháp này còn giúp chúng ta luyện giải phương trình vô tỷ rất tốt, thậm chí là bất phương trình vô tỉ.

Nhưng phương pháp nào cũng có giới hạn của nó, có điểm mạnh điểm yếu riêng, anh sẽ trình bày cụ thể trong quá trình giải bài.

Dạng 1: Các mối quan hệ được rút ra từ 1 phương trình

Khởi động là 1 bài dễ trước nhé :

*** Các ví dụ**

Khởi động 1 bài đơn giản trước đã nhé !!!

Ví dụ 1: (CĐ-2014) Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} x^2+xy+y^2=7 \\ x^2-xy-2y^2=-x+2y \end{cases}$ $(x, y \in R)$

*** Nhận xét chung:**

Hệ gồm 2 phương trình 2 ẩn, điều đặc biệt là ở chỗ 1 phương trình có thể biến đổi được còn 1 phương trình thì không có gì mà biến đổi, nhìn qua thì các em thấy như vậy

Vậy dàn ý chung là: từ phương trình biến đổi được đưa ra mối quan hệ x và y rồi thế vào phương trình không biến đổi được

Bằng giác quan ta sẽ tìm các nào đó để xử lý phương trình số 2, các em đa số là sẽ cứ viết dùng đủ mọi cách nhóm và rồi tự biến đổi mò 1 lúc thì nó ra mối quan hệ x và y.

Nhưng anh sẽ trình bày 1 phương pháp sử dụng máy tính để tìm mối liên hệ như sau:

Sử dụng tính năng Solve:

Các em biến đổi phương trình 2 về hết 1 vế : $X^2-XY-2Y^2+X-2Y=0$

Ấn trên máy:

Alpha X x^2 - Alpha X Alpha Y – 2 Alpha Y x^2 Alpha + alpha X - 2 alpha Y

(không cần ấn = 0, khác version 1.0)

Giải thích "Alpha X, Alpha Y" là gọi biến X, biến Y nhưng với máy tính thì mặc định X là biến, Y là tham số

Sau đó các em bấm: **Shift Solve**

Máy hiện : **Y?** ← tức là máy hỏi ban đầu cho tham số Y bằng mấy để còn tìm X

Các em khởi tạo giá trị ban đầu cho Y là **0** bằng cách nhập: **0 =**

Nếu máy hỏi " **Solve for X**" thì các em ấn "**0=**" nhé

Bây giờ máy sẽ xử lý

Máy hiện:

X = 0 tức là khi y=0 thì có nghiệm x=0

⎿ -R= 0 sai số của nghiệm là 0

Rồi vậy là được **Y=0 thì X=0**

Tiếp theo các em ấn **"mũi tên chỉ sang trái"** để quay trở về phương trình

Lại bắt đầu khởi tạo giá trị ban đầu **Y=1, X=0**

Thì máy lại tính ra **X = 2**

Cứ như vậy tới **Y=5, X =0** ta được bảng giá trị sau:

Bảng 1:

Y	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
X	**0**	**2**	**-3**	**-4**	**-5**	**-6**

***Cách 2: phức tạp hơn nhưng kiểm soát được toàn bộ nghiệm**

Với **Y = 0** ta đã tìm được 1 nghiệm **X = 0**

Để xem phương trình có còn nghiệm nào khác không các em làm như sau:

Ấn mũi tên sang ngang sửa phương trình thành: $(X^2 - XY - 2Y^2 + X - 2Y):(X-0)$

Phương trình này để bỏ nghiệm vừa tìm được và tìm nghiệm mới.

Sau đó lại bấm như ban đầu thì được **X = -1**

Sau đó lại ấn $\dfrac{X^2 - XY - 2Y^2 + X - 2Y}{(X-0)(X+1)}$

Sau đó lại bấm giải nghiệm thì máy báo " Can't solve" tức là vô nghiệm hay hết nghiệm rồi

Vậy là được Y=0 thì X=0, X = -1

Tiếp theo các em ấn **"mũi tên chỉ sang trái"** để quay trở về phương trình

Ta lại phải sửa phương trình thành: $X^2 - XY - 2Y^2 + X - 2Y$

Lại bắt đầu khởi tạo giá trị ban đầu Y=1, X=0

Thì máy lại tính ra X = 2 hoặc -2

Cứ như vậy tới Y=5 thì được các kết quả như sau:

Bảng 2:

Y	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
X	**0 hoặc -1**	**2 hoặc -2**	**-3 hoặc 4**	**-4 hoặc 6**	**-5 hoặc 8**	**-6 hoặc 10**

Cách 2 này tuy đầy đủ nhưng sẽ rất mất thời gian chỉnh sửa phương trình nên trong tài liệu đa phần anh sẽ giải bằng cách 1, vì những bài thi ĐH không quá phức tạp

***Cách 3: Để tìm nghiệm khác ngoài 1 nghiệm tìm được**

Ví dụ khi Y=0, lúc máy hỏi " Solve for X" Các em ấn 0 = sẽ tìm được nghiệm X = 0

Các em ấn "-9=" thì sẽ được nghiệm X = -1

Các em ấn "9=" thì sẽ được nghiệm X=0

Vậy là ta đã tìm được ngay 2 nghiệm X = -1 và X =0 khi Y= 0

Anh rất hay dùng cách 1 cho hệ và cách 3 cho phương trình 1 ẩn, để tăng tốc độ làm bài

Các kết quả này hoàn toàn là do máy, từ bảng 1 ta thấy khi **Y = 2** tới **Y=5** anh thấy nó xuất hiện 1 quy luật gì đó

Tại **Y=0, Y=1** không xuất hiện quy luật do có nhân tử khác gây nhiễu bởi vì tính năng **Solve** là tính năng dò nghiệm theo công thức Newton nên nó sẽ tìm nghiệm gần với giá trị biến hiện tại của **X** , ở đây các TH chúng ta đều khởi tạo giá trị ban đầu **X = 0**.

Từ **Y=2** anh thấy nó xuất hiện 1 quy luật gì đó, dễ dàng nhận thấy là **x+y+1 = 0**

Vậy anh sẽ biến đổi phương trình 2 theo xem được không:

Thêm bớt để ép nhân tử :

$$x^2 - xy - 2y^2 = -x + 2y$$
$$\Leftrightarrow x^2 - xy - 2y^2 + x - 2y = 0$$
$$\Leftrightarrow x(x+y+1) - 2xy - 2y^2 - 2y = 0$$
$$\Leftrightarrow x(x+y+1) - 2y(x+y+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-2y)(x+y+1) = 0$$

Vậy nghiệm vừa nãy bị nhiễu là do x-2y =0

Còn lại thì dễ dàng rồi nào:

$\left[\begin{array}{l} x = 2y \\ x = -(y+1) \end{array}\right.$ thế vào phương trình đầu tiên

* x=2y thì: $4y^2 + 2y^2 + y^2 = 7 \Leftrightarrow y = \pm 1$

* x= -(y+1) thì các em tự xử lý nhé

Anh nói thì dài thôi chứ lúc làm thì nhanh lắm!!!

Như vậy là anh vừa trình bày chi tiết cách giải 1 bài hệ bằng máy tính casio fx-570 ES Plus nhưng bài trên là 1 bài dễ và chưa sử dụng một ứng dụng chính của Solve là tìm nghiệm phương trình 1 ẩn dù nó có phức tạp tới đâu.

Tiếp tục nhé, nâng level nên nào



Ví dụ 2: (ĐH-B-2014) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(1-y)\sqrt{x-y}+x=2+(x-y-1)\sqrt{y}\\ 2y^2-3x+6y+1=2\sqrt{x-2y}-\sqrt{4x-5y-3}\end{cases}$

(x, y là các số thực)

- **Nhận xét chung**

Thấy ngay phương trình số 2 khó biến đổi, phương trình 1 có vẻ dễ hơn , vậy ta thử xem nào

Lưu ý ở bài này: điều kiện pt 1 là $x \geq y$ bởi vậy lúc khởi tạo giá trị ban đầu " **Solve for X**" các em phải nhập số lớn hơn Y, chẳng hạn là "9=" . Tại sao lại thế ?

Vì nếu em cho Y = 3 mà giá trị ban đầu X = 2 thì máy sẽ có 2 kiểu dò nghiệm

1 là : $2 \to 2,1 \to 2,2 \to 2,3 \to ....$

2 là : $.... \leftarrow 1,7 \leftarrow 1,8 \leftarrow 1,9 \leftarrow 2$

Nhưng đi theo đường nào thì $\sqrt{x-y}$ cũng không xác định ngay, do đó máy dừng dò nghiệm và báo "**Can't Solve**"

Do đó phải khởi tạo giá trị ban đầu của X lớn hơn Y

Các em làm tương tự, anh cho kết quả luôn:

Y	0	1	2	3	4	5
X	1	2	3	4	5	6

Dựa vào bảng ta thấy luôn : $x-y=1$ hoặc $\sqrt{x-y}=1$

Vậy là đầu tiên anh đi theo hướng "x-y-1=0" trước vì vế phải có sẵn rồi kìa, chỉ cần biến đổi những số còn lại xem có được không là chuyển hướng luôn

$$(1-y)\sqrt{x-y}+x=2+(x-y-1)\sqrt{y}$$
$$\Leftrightarrow (1-y)\sqrt{x-y}+x-2-(x-y-1)\sqrt{y}=0$$
$$\Leftrightarrow (1-y)\sqrt{x-y}+(x-y-1)+(y-1)-(x-y-1)\sqrt{y}=0$$
$$\Leftrightarrow (1-y)\left[\sqrt{x-y}-1\right]+(x-y-1)\left[1-\sqrt{y}\right]=0$$

Tới đây phải nói là quá may mắn

$$pt \Leftrightarrow (1-\sqrt{y})(\sqrt{x-y}-1)\left[\left(1+\sqrt{y}\right)+\left(\sqrt{x-y}+1\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x-y}-1=0\\ 1-\sqrt{y}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y+1\\ y=1\end{array}\right.$$

Thế vào phương trình 2 ta được:

Với y = 1 thì 9-3x =0 → x=3

Với y = x - 1

$$2y^2-3(y+1)+6y+1=2\sqrt{1-y}-\sqrt{1-y}$$
$$\Leftrightarrow 2y^2+3y-2=\sqrt{1-y}$$

Điều kiện ban đầu $y\geq 0$ **mà bây giờ lại có** $y\leq 1$

Vậy $y\in[0;1]$

Dễ thấy VT đồng biến với điều kiện trên, VP thì nghịch biến, các em tính đạo hàm ra sẽ thấy nên nếu phương trình có nghiệm thì sẽ là nghiệm duy nhất

Thử bấm máy xem nào: **2 alpha X** x^2 **+ 3 alpha X -2 Alpha =** $\sqrt{\ }$ **1- alpha X**

Sau đó bấm **Shift solve 0 ,5 =**

Phải dùng biến X nhé mà máy nó mặc định như vậy rồi

Ta đang tìm X trong khoảng [0;1] mà nên phải khởi tại giá trị ban đầu X = 0,5 chẳng hạn được X=0,618033…..

Nếu x nguyên thì xong rồi đó nhưng đằng này có vẻ không còn may mắn nữa.

Vậy Bộ Giáo Dục cố tình ra nghiệm lẻ để làm khó ta, nhưng anh đã có cách

Ta thử bình phương nghiệm X đó lên xem có đẹp không nhưng câu trả lời là không!

Hi vọng nghiệm này không quá xấu, nó có dạng $\dfrac{a+\sqrt{b}}{c}$ **là dạng nghiệm của phương trình bậc 2 thì ta sẽ giải quyết được.**

***Tư duy ở đây là: phương trình trên nếu bình phương lên sẽ ra bậc 4 đầy đủ nên có thể phân tích được thành:** $(x^2+Sx+P)(x^2+S'x+P')$

Do đó anh chỉ cần tìm được 1 nhân tử (x^2+Sx+P) **là xong, vậy ta cần tìm 3 trong 4 nghiệm**

Về lý thuyết là vậy nhưng thực tế anh tìm cả 4 nghiệm luôn

Bản chất của phương trình trên là bậc 4 nên ta sẽ bình phương lên để mất căn rồi chuyển sang 1 vế

Các em nhập lại phương trình thành: (2 alpha X x^2 **+ 3 alpha X -2)**^{2} **- (1- alpha X)**

Các em bấm dấu "=" để lưu phương trình vào máy

Sau đó bấm Shift solve 0 =

Máy báo X = 0,3228….

Sau đó các em bấm RCL X Shift STO A để lưu nghiệm X vừa tìm được vào A

Vậy là được 1 nghiệm, để tìm nghiệm thứ 2 ta làm như nhau :

Nhấn nút đẩy lên 2 lần để tìm phương trình ta đã lưu

Đưa mũi tên chỉ sang trái, sửa phương trình thành:

((2 alpha X x^2 + 3 alpha X -2)^2 - (1- alpha X)): (X-A)

Sau đó bấm Shift solve

Máy hỏi A? 0,3228….. thì các em bấm dấu =

Máy hiện "Solve for X" thì các em cũng ấn 0=

Máy báo X = 0,6180....

Các em ấm phím đẩy sang trái rồi ấn = để lưu lại phương trình

Sau đó các em bấm RCL X Shift STO B để lưu nghiệm X vừa tìm được vào B

Vậy đã có nghiệm thứ 2, các em lại ấn nút đẩy lên 2 lần, rồi đẩy sang trái để sửa phương trình tìm nghiệm thứ 3 các em lại sửa thành

((2 alpha X x^2 + 3 alpha X -2)^2 - (1- alpha X)) : (X-A)(X-B)

Sau đó bấm Shift solve = = 0=

Được nghiệm thứ 3 là : X= -1,61803…..

Các em ấm phím đẩy sang trái rồi ấn = để lưu lại phương trình

Sau đó các em bấm RCL X Shift STO C để lưu nghiệm X vừa tìm được vào C

Tương tự phương trình tìm nghiệm thứ 4 :

((2 alpha X x^2 + 3 alpha X -2)^2 - (1- alpha X)) : (X-A)(X-B)(X-C)

Sau đó bấm Shift solve = = = 0=

Các em sẽ được nghiệm thứ 4 là : X = -2,3228…

Vậy ta đã được 4 nghiệm là A,B,C,X

Ta biết rõ ràng là nghiệm B = 0,618… là nghiệm của phương trình ban đầu nên ta sẽ xét các tích BA,BC,BX xem tích nào đẹp

Thấy ngay: BC = - 1 và B+C = -1

Vậy phương trình chứa nghiệm B,C này là x^2+x-1 (định lý Vi-et đảo)

Đây chính là cách phân tích phương trình bậc 4 thành nhân tử với máy tính

Vậy ta sẽ cố nhóm để xuất hiện nhân tử này: với bài thì là y^2+y-1, ép nhân tử như sau:

$2y^2+3y-2=\sqrt{1-y}$

$\Leftrightarrow 2(y^2+y-1)+y-\sqrt{1-y}=0$

$\Leftrightarrow 2(y^2+y-1)+\dfrac{y^2-(1-y)}{y+\sqrt{1-y}}=0$

$\Leftrightarrow (y^2+y-1)(2+\dfrac{1}{y+\sqrt{1-y}})=0$

$\Leftrightarrow y^2+y-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}(tm)\rightarrow x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}(loai) \end{array}\right.$

Các em tự kết luận nhé!

Ví dụ 3: (ĐH-AA1-2014) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{12-y}+\sqrt{y(12-x^2)}=12 \\ x^3-8x-1=2\sqrt{y-2} \end{cases}$ **(x, y là số thực)**

***Nhận xét chung:**

Ta thấy phương trình 1 dễ biến đổi hơn phương trình 2

Điều kiện $\begin{cases} 2\le y\le 12 \\ x^2\le 12 \end{cases}$

* Anh cho bảng kết quả bấm máy luôn

Y	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**12**	**0**
X	**3,16**	**3**	**2,828**	**2,64**	**2,44**	**0**	**3,464**

Nhận xét chung là Y tăng thì X giảm

Với Y=2, Y=4, Y=5, Y=6 thì kết quả xấu quá ta thử bình phương lên xem có sử dụng được không

Y	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**12**	**0**
X^2	**9,9999**	**9**	**8**	**7**	**6**	**0**	**12**

Chứng tỏ các bác ở BGD cũng không làm khó ta lắm

Nhận thấy $y+x^2=12$

Căn cứ vào phương trình 1 thì sẽ là $y=12-x^2$

Làm sao để chứng minh điều này, dễ thấy không thể phân thích thành nhân tử như bài trước được

Giờ chỉ còn hàm số và đánh giá mà thôi

Do x, y không độc lập lên không dùng hàm số được (kinh nghiệm nhỏ của anh)

Vậy thử đánh giá, mà có 2 tích nên chỉ có Cô-si thôi

Ta dùng máy thử luôn cho nhanh nhé

Chúng ta dùng chức năng **CALC** để tính giá trị biểu thức

Các em nhập nguyên vế trái vào: $x\sqrt{12-y}+\sqrt{y(12-x^2)}$

Alpha X $\sqrt{\ }$ 12 – alpha Y + $\sqrt{\ }$ alpha Y – (12 – alpha X x^2)

Sau đó các em bấm **CALC**

Máy hiện X? em nhập **1 =**

Máy lại hỏi Y? em nhập vào là **11= hoặc tùy ý**

X	**1**	**1**	**2**	**2**	**3**	**3**	**4**
Y	**10**	**11**	**10**	**11**	**8**	**11**	
Giá trị hàm	**11,9**	**12**	**11,7**	**11,38**	**10,89**	**8,7**	**error**

Ta nhận thấy $VT\le 12=VP$ vậy đánh giá là phương pháp đúng đắn

Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si ta được:

$$x\sqrt{12-y}+\sqrt{y(12-x^2)}\le\frac{x^2+(12-y)}{2}+\frac{y+(12-x^2)}{2}=12$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}x=\sqrt{12-y}\\ y=12-x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ y=12-x^2\end{cases}$

Thế vào phương trình 2 ta được: $x^3-8x-1=2\sqrt{10-x^2}$

Ta bấm máy xem có nghiệm nguyên không , có thì coi như xong

Các em bấm như sau: **Alpha X Shift x^2 -8 Alpha X -1 = 2 $\sqrt{\ }$ 10 – alpha X x^2**

Sau đó ấn **Shifl Solve** **9=**

(nếu các em ấn **0=** sẽ bị ra nghiệm **-1,** nên phải ấn **9=** để tìm nghiệm dương xem thêm ***cách 3*** nhé)

Ra được **x=3**, tới đây có thể mỉm cười được rồi

Ta sẽ biến đổi theo **x-3 = 0**

$$x^3-8x-1=2\sqrt{10-x^2}$$

$$\Leftrightarrow(x^3-8x-3)+2(1-\sqrt{10-x^2})=0$$

Anh ghép 1 với $\sqrt{10-x^2}$ vì khi nhân liên hợp nó xuất hiện $x^2-9=(x-3)(x+3)$

Tới đây các em vào máy giải phương trình bậc 3 kia xem được nghiệm gì nhé, đừng nói là em không biết bấm máy cái này

Được **x=3 và 2** nghiệm xấu nhưng không sao vậy là được rồi

Ta tiến hành chia x^3-8x-3 cho **(x-3)** được x^2+3x+1

Vậy ta có:

$$(x-3)(x^2+3x+1)+2(1-\sqrt{10-x^2})=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x^2+3x+1)+2.\frac{x^2-9}{1+\sqrt{10-x^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[x^2+3x+1+\frac{2(x+3)}{1+\sqrt{10-x^2}}\right]=0$$

Ta có $x\geq 0$ **nên** $x^2+3x+1+\frac{2(x+3)}{1+\sqrt{10-x^2}}\geq 0$

Do đó phương trình có nghiệm duy nhất x=y=3

Ví dụ 4: Đề thi thử THPT Quốc Gia của Sở GD TP. HCM

Giải hệ phương trình : $\begin{cases}\left(\sqrt{y}+1\right)^2+\dfrac{y^2}{x}=y^2+2\sqrt{x-2}\\ x+\dfrac{x-1}{y}+\dfrac{y}{x}=y^2+y\end{cases}$

Giải:

Khi nhìn vào 2 phương trình này thì ta thấy phương trình số 2 dễ biến đổi hơn phương trình 1, em nào không nhìn ra điều này thì đi thử cả 2 phương trình cũng được.

Điều kiện: $x\geq 2, y>0$

Các em nhập phương trình : $x+\frac{x-1}{y}+\frac{y}{x}=y^2+y$ **như sau:**

Alpha X + $\frac{AlphaX-1}{AlphaY}$ + $\frac{AlphaY}{AlphaX}$ = **Alpha Y** x^2 + **Alpha Y**

Sau đó các em bấm:

Shift Solve máy sẽ hiện **" Y?"** các em nhập **1 =**

Máy sẽ hiện **" Solve for X"** tức là khai báo giá trị ban đầu của **X**

Các em bấm **" 0 = "**

Máy sẽ trả về giá trị nghiệm **X = 0,5. Vậy Y = 1 thì X = 0,5**

Để tìm nghiệm tiếp với Y=2 thì các em bấm :

Shift Solve máy sẽ hiện **" Y?"** các em nhập **2 =**

Cứ như vậy với Y = 3,4,5 ta thu được bằng giá trị sau:

Y	1	2	3	4	5
X	0,5	0,333…= 1/3	0,25 = 1/4	0,2 = 1/5	0,16666.. =1/6

Dựa vào bảng, ta thấy xuất hiện quy luật : $X = \dfrac{1}{Y+1} \Leftrightarrow XY + X - 1 = 0$

Ta sẽ ép để xuất hiện nhân tử trên như sau:

$$x + \frac{x-1}{y} + \frac{y}{x} = y^2 + y$$
$$\Leftrightarrow \frac{xy+x-1}{y} + \frac{y}{x} - y^2 - y = 0$$
$$\Leftrightarrow (xy+x-1)x + y^2 - y^3x - xy^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (xy+x-1)x - y^2(xy+x-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (xy+x-1)(x-y^2) = 0(3)$$

Rất may ở bài này chúng ta không bị nhiễu bởi nhân tử $x = y^2$ như ở ví dụ 1.

Với $x \geq 2, y > 0$ thì $xy + x - 1 > 0$ nên từ (3) ta có : $x = y^2$ thế vào phương trình (1) ta có:

$$\left(\sqrt{y}+1\right)^2 + 1 = y^2 + 2\sqrt{y^2-2}$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{y}+1\right)^2 = (y^2-2) + 2\sqrt{y^2-2} + 1$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{y}+1\right)^2 = \left(\sqrt{y^2-2}+1\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{y} + 1 = \sqrt{y^2-2} + 1$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{y} = \sqrt{y^2-2}$$
$$\Leftrightarrow y^2 - y - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1(loai) \\ y = 2(tm) \rightarrow x = 4 \end{array}\right.$$

Vậy hệ có 1 nghiệm duy nhất là $(4;2)$

****Dạng 2: Các mối quan hệ được rút ra từ kết hợp 2 phương trình***

Dấu hiệu là: bấm nghiệm của 1 trong 2 phương trình ra xấu

Ví dụ 1:

$$\begin{cases} 2(x+y)^3 + 4xy - 3 = 0(1) \\ (x+y)^4 - 2x^2 - 4xy + 2y^2 + x - 3y + 1 = 0(2) \end{cases}$$

Giải:

Để sử lý được dạng này, thì phải cộng (trừ) (1) với (2) nhân với k, đơn giản nhất là k =1 có những bài phải cộng (trừ) đi k =1,2,3,4,5,.... Nhưng dạng này bây giờ khá hiếm, vì cũng khá khó đối với các em.

$$(x+y)^4 - 2x^2 - 4xy + 2y^2 + x - 3y + 1 + k.[2(x+y)^3 + 4xy - 3] = 0$$

Các em thử k =1,2,3,4,5...hoặc -1,-2,-3,-4,-5.... cho tới khi Y nguyên thì X nguyên nhé

Ta được bảng giá trị sau:

Y	0	1	2	3	4	5	
X	1	0	-1				

Dễ thấy quy luật x + y =1

Ta biến đổi như sau:

$$(x+y)^4-2x^2-4xy+2y^2+x-3y+1+[2(x+y)^3+4xy-3]=0$$
$$\Leftrightarrow (x+y)^4+2(x+y)^3-2x^2+2y^2+x-3y-2=0$$
$$\Leftrightarrow (x+y)^3(x+y-1)+3[(x+y)^3-1]-2x^2+2(y^2-2y+1)+(x+y-1)=0$$
$$\Leftrightarrow (x+y)^3(x+y-1)+3[(x+y)^3-1]-2[x^2-(y-1)^2]+(x+y-1)=0$$
$$\Leftrightarrow (x+y-1)\{(x+y)^3+3[(x+y)^2+(x+y)+1)]\text{-}2(x\text{-}y\text{+}1)\text{+}1\}=0$$
$$\Leftrightarrow (x+y-1)\{(x+y)^3+3(x+y)^2+2+x+5y\}=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y-1=0(3) \\ (x+y)^3+3(x+y)^2+2+x+5y=0(4)\end{array}\right.$$

Lấy 2.(4) – (1) được : $6(x+y)^2+2x+10y+4-4xy+3=0$

$$\Leftrightarrow 6(x^2+2xy+y^2)-4xy+2x+10y+7=0$$
$$\Leftrightarrow (5x^2+8xy+\frac{16}{5}y^2)+(x^2+2x+1)+[\frac{14}{5}y^2+10y+(\frac{25}{14})^2]+7-1-(\frac{25}{14})^2=0$$
$$\Leftrightarrow (x\sqrt{5}+\frac{4}{\sqrt{5}}y)^2+(x+1)^2+[\sqrt{\frac{14}{5}}y+\frac{25}{4}]^2+6-\left(\frac{25}{14}\right)^2=0$$

Do **VT > 0** nên phương trình này vô nghiệm.

Vậy: **x +y -1 = 0** thay vào (1) được:

$$2+4x(1-x)-3=0 \Leftrightarrow 4x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \to y=\frac{1}{2}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $x=y=\frac{1}{2}$ **(bài này các em có thể làm theo phương pháp đánh giá)**

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2x^2-11x-2y+9=0 \\ 4x^2-22x+21+y^3+3y^2+y=(2x+1)\sqrt{2x-1}\end{cases}$

Gợi ý:

Bấm máy cả 2 phương trình Y nguyên → X ra lẻ → nghĩ tới dạng 2: kết hợp 2 phương trình
Lấy (2) – k(1) bấm máy với k = 1,2,3,4…. và Y= 0

$$[4x^2-22x+21+y^3+3y^2+y-(2x+1)\sqrt{2x-1}]\text{-k.}(2x^2-11x-2y+9)=0$$

Với k=1, Y= 0 → ra X = 9,… ra nghiệm xấu

Với k= 2, Y=0……….X = 1 quá đẹp, thử tiếp Y = 1 được X =2,5

Vậy xong rồi

Ta có bảng giá trị sau :

Y	0	1	2	3	4	5	
X	1	2,5	5	8,5	13		

Chú ý là bài có căn thì phải bấm luôn với X như vậy xem căn bằng bao nhiêu có đẹp không?

Dễ dàng suy ra được: $y+1=\sqrt{2x-1}$ muốn chứng minh điều này thì chỉ có dùng hàm số thôi, để ý vào phương trình nhé, cố ép sao về dạng hàm, thường người ta cũng sẽ gợi ý cho mình cứ x, y độc lập 2 vế thì nghĩ tới hàm số đầu tiên nhé.

Lấy (2) - 2.(1) ta được:

$$y^3+3y^2+5y+3=(2x+1)\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow (y^3+3y^2+3y+1)+2(y+1)=(2x-1)\sqrt{2x-1}+2\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow (y+1)^3+2(y+1)=\left(\sqrt{2x-1}\right)^3+2\sqrt{2x-1}$$

Xét hàm $f(t)=t^3+2t$ là xong, phần còn lại các em tự làm tiếp nhé

**** Dạng 2 này anh chỉ mở rộng thêm còn chủ yếu anh tập chung vào dạng 1 vì có tới 90% các hệ trong đề thi thử và ĐH đều ở dạng 1, minh chứng là các ví dụ sau đây:***

Ví dụ 1. (ĐH-AA1-2013) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{y^4+2}=y\\ x^2+2x(y-1)+y^2-6y+1=0\end{cases}$ (với x, y là các số thực)

Giải:

Điều kiện $x\ge 1$

- Bảng kết quả với phương trình 1: $\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{y^4+2}=y$

Y	0	1	2	3	4	5
X	1	Can't	17	82	257	

Dự đoán: $y=\sqrt[4]{x-1}$

Từ đó các em kết hợp với PP hàm số là ra do x và y đứng độc lập nên nghĩ tới hàm số.

Ta biến đổi phương trình 1 thành: $\sqrt{\left(\sqrt[4]{x-1}\right)^4+2}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt{y^4+2}+y$

Xét hàm: $f(t)=\sqrt{t^4+2}+t$ với $t\ge 0$

$f'(t)=\dfrac{2t^3}{\sqrt{t^4+2}}+1>0$ với $t\ge 0$ do đó hàm đồng biến nên : $y=\sqrt[4]{x-1}$

Thế vào phương trình (2) ta được: $y(y^7+2y^4+y-4)=0$ (3)

$g(y)=y^7+2y^4+y-4, g'(y)=7y^6+8y^3+1>0$ với $y\ge 0$

Dễ thấy $g(1)=0$ nên phương trình (3) có 2 nghiệm là y=0 và y = 1 suy ra x = 1 và x = 2

Vậy hệ có 2 nghiệm là (1;0) và (2;1)

Ví dụ 2. (ĐH-B-2013) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2+y^2-3xy+3x-2y+1=0 \\ 4x^2-y^2+x+4=\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+4y} \end{cases} (x, y \in R)$

Giải:

- Bảng kết quả với phương trình 1: $2x^2 + y^2 - 3xy + 3x - 2y + 1 = 0$
- Lưu ý mọi trường hợp ban đầu đều cho X = 0 nhé, để KQ của các em trung với của anh

Y	0	1	2	3	4	5
X	-0,5	0	0,5	1	1,5	2

Dễ dàng nhận ra quy luật là 2x+1 = y, các em cứ ghép để xuất hiện nhân tử (2x-y+1) là được

$$2x^2+y^2-3xy+3x-2y+1=0$$
$$\Leftrightarrow x(2x-y+1)-2xy+2x-2y+y^2+1=0$$
$$\Leftrightarrow x(2x-y+1)-y(2x-y+1)+2x-y+1=0$$
$$\Leftrightarrow (x-y+1)(2x-y+1)=0$$

ở đây có 1 phần tử gây nhiễu là **x-y+1** nhưng mà cũng may là không ảnh hưởng lúc ta bấm máy.

Vậy : $\left[\begin{array}{l} y=x+1 \\ y=2x+1 \end{array}\right.$

***Với y = x + 1** thay vào phương trình (2) ta có:

$3x^2-x+3=\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}$ các em bấm được ra 2 nghiệm là **x = 0 và x = 1** chỉ cần khởi tạo giá trị ban đầu là **"-9=" và "9="** các em sẽ tìm được 2 nghiệm này vậy sẽ có nhân tử " x^2-x "

Ta phân tích thành:

$$3(x^2-x)+(x+1-\sqrt{3x+1})+(x+2-\sqrt{5x+4})=0$$
$$\Leftrightarrow (x^2-x)\left[3+\frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}}\right]=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \end{array}\right.$$

Vậy ta tìm được 2 nghiệm là **(0;1) và (1;2)**

***Với y = 2x + 1** thay vào phương trình (2) được:

$3-3x=\sqrt{4x+1}+\sqrt{9x+4}$ làm tương tự như trên được:

$$x(3+\frac{4}{\sqrt{4x+1}+1}+\frac{9}{\sqrt{9x+4}+2})=0 \Leftrightarrow x=0$$

Vậy hệ có 2 nghiệm là **(0;1) và (1;2)**

Ví dụ 3: (ĐH-AA1-2012) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-3x^2-9x+22=y^3+3y^2-9y \\ x^2+y^2-x+y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ $(x,y\in R)$

Gợi ý:

- Bảng kết quả với phương trình 1: $x^3-3x^2-9x+22=y^3+3y^2-9y$

Y	0	1	2	3	4	100
X	2	3	1,79 hoặc 4	-1 hoặc 5		102

Bài này cũng có phần tử gây nhiễu cho việc bấm máy, nhưng ta vẫn tìm đc là có nhân tử:
x = y+2 hoặc x-1= y+3 hoặc x-2 = y hoặc x-1 = y+1 căn cứ vào bài mà chọn mối quan hệ thích hợp
Rõ ràng x và y độc lập với nhau nên nghĩ nay tới pp hàm số, các em biến đổi thành:

$(x^3-3x^2+3x-1)-12(x-1)=(y^3+3y^2+3y+1)-12(y+1)$

$\Leftrightarrow (x+1)^3-12(x+1)=(y+1)^3+(y+1)$

Để xét hàm thì các em phải chú ý vào đoạn mà ta cần xét nhé, ở đây phải bám vào pt 2, BGD giải khá chi tiết rồi, anh chỉ định hướng cho các em thôi.

Ví dụ 4. (ĐH-A-2011) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 5x^2y-4xy^2+3y^3-2(x+y)=0 \\ xy(x^2+y^2)+2=(x+y)^2 \end{cases}$ (với x, y là các số thực)

Gợi ý:

- Bảng kết quả với phương trình 2: $xy(x^2+y^2)+2=(x+y)^2$

Y	0	1	2	3	4	5
X	-1,4141	1	0,5	1/3	1/4	1/5

Rõ ràng ta thấy pt có nhân tử (xy-1) ta sẽ cố tính nhóm để xuất hiện

$(xy-1)(x^2+y^2)-(x^2+y^2)+2-(x+y)^2=0$

$(xy-1)(x^2+y^2)+2(1-xy)=0$

$(xy-1)(x^2+y^2-2)=0$

+ TH 1: xy = 1 : Các em tự làm vì đơn giản

+TH 2 : $x^2+y^2=2$, thay vào 1 được : $3y(x^2+y^2)-4xy^2+2x^2y-2(x+y)=0$

Các em bấm máy để tìm quy luật của phương trình này : $6y-4xy^2+2x^2y-2(x+y)=0$

Y	0	1	2	3	4	5
X	0	1	0,5	1/3	1/4	1/5

Vậy lại có nhân tử (xy -1) = 0 ta sẽ lại ép nhân tử :

$6y-4xy^2+2x^2y-2(x+y)=0$

$\Leftrightarrow -2xy^2+x^2y-x+2y=0$

$\Leftrightarrow -2y(xy-1)+x(xy-1)=0$

$\Leftrightarrow (x-2y)(xy-1)=0$

Tới đây thì dễ rồi, còn lại các em tự biến đổi tiếp nhé

Ví dụ 5. (ĐH-A-10) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0(1)\\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7(2)\end{cases}$ $(x, y \in R)$

Đây là câu 10 điểm của đề ĐH 2010:

ĐK: $y \le \frac{5}{2},\ x \le \frac{3}{4}$

- Bảng kết quả với phương trình 1: $(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0$

Y	0	1	2	3	-1	-2
X	1,11	0,866	0,5	1/3	1,3228	1,5
X^2	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	Can't solve	$\frac{7}{4}$	$\frac{9}{4}$

Dự đoán: $X^2=\frac{5-2Y}{4}$ hoặc $2x=\sqrt{5-2y}$

Để ý 2 vế x, y hoàn toàn độc lập nên ta sẽ lại áp dụng phương pháp hàm số

$(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0$

$[(2x)^2+1].\frac{x}{2}=[(5-2y)+1].\frac{\sqrt{5-2y}}{2}$

Xét hàm: $f(t)=(t^2+1).\frac{t}{2}=\frac{1}{2}(t^3+t)$ hàm này đồng biến biến trên do $f'(t)>0$

$2x=\sqrt{5-2y} \Leftrightarrow \begin{cases}x \ge 0\\ x=5-2y\end{cases} \Rightarrow y=\frac{5-x}{2}$ thế vào (2)

$4x^2+\left(\frac{5}{2}-2x^2\right)^2+2\sqrt{3-4x}-7=0(3)$

Xét hàm $g(x)=4x^2+\left(\frac{5}{2}-2x^2\right)^2+2\sqrt{3-4x}-7$ trên đoạn $\left[0,\frac{3}{4}\right]$

$g'(x)=8x-8x\left(\frac{5}{2}-2x^2\right)-\frac{4}{\sqrt{3-4x}}=4x(4x^2-3)-\frac{4}{\sqrt{3-4x}} \le 0$ nên hàm số nghịch biến.

Mà $g\left(\frac{1}{2}\right)=0$ nên $x=\frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của (3)

Với $x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=2$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $\left(\frac{1}{2};2\right)$

***Mở rộng :** *Ngoài giải Hệ Phương trình, máy tính FX – 570 ES PLUS còn hỗ trợ rất tốt trong việc giải Bất Phương Trình và Phương Trình bậc cao cũng như phương trình vô tỷ.*

Sau đây anh muốn bổ sung thêm 1 bài như vậy:

Trích Đề thi thử THPT Chuyên Vinh lần 3 2015 ngày 17/5/2015

Giải bất phương trình : $3(x^2-1)\sqrt{2x+1}<2(x^3-x^2)$

Giải: ĐK: $x\ge -\frac{1}{2}$

$(1)\Leftrightarrow (x-1)[3(x+1)\sqrt{2x+1}-2x^2]<0$

Bấm máy giải nghiệm của phương trình: $3(x+1)\sqrt{2x+1}-2x^2$

Được 2 nghiệm là X = 6,464… và X = -0,464….

Các em lưu và A và B, để ý rằng AB = -3 và A+B = 6 nên chắc chắn có nhân tử x^2-6x-3

Ta sẽ cố gắng ép để có nhân tử:

$3(x+1)\sqrt{2x+1}-2x^2$

$=3(x+1)\sqrt{2x+1}-2(x^2-6x-3)-(12x+6)$

$=3\sqrt{2x+1}(x+1-2\sqrt{2x+1})-2(x^2-6x-3)$

$=3\sqrt{2x+1}.\frac{(x+1)^2-4(2x+1)}{x+1+2\sqrt{2x+1}}-2(x^2-6x-3)$

$=3\sqrt{2x+1}.\frac{x^2-6x-3}{x+1+2\sqrt{2x+1}}-2(x^2-6x-3)$

Vậy ta có:

$(x-1).(x^2-6x-3)(\frac{3\sqrt{2x+1}}{x+1+2\sqrt{2x+1}}-2)<0$

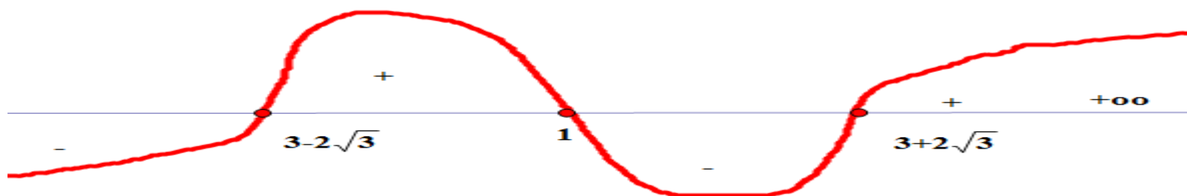
$\Leftrightarrow (x-1).(x^2-6x-3)[-\sqrt{2x+1}-2(x+1)]<0$

$\Leftrightarrow (x-1).(x^2-6x-3)[-(2x+1)-\sqrt{2x+1}-1]<0$

Mà $-(2x+1)-\sqrt{2x+1}-1=-[(2x+1)+\sqrt{2x+1}+1]=-[(\sqrt{2x+1}+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]<0$

$\Rightarrow (x-1).(x^2-6x-3)>0$

Tới đây thì các em, biểu diễn 3 nghiệm trên 2 trục số:



Từ sơ đồ xét dấu và điều kiện ta có: $\begin{cases} x\ge -\frac{1}{2} \\ x\in\left(3-2\sqrt{3};1\right)\cup\left(3+2\sqrt{3};+\infty\right)\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(3-2\sqrt{3};1\right)\cup\left(3+2\sqrt{3};+\infty\right)$

Vậy tập nghiệm của BPT là: $T=\left(3-2\sqrt{3};1\right)\cup\left(3+2\sqrt{3};+\infty\right)$

Ngoài ra còn 1 cách cũng khá hay nữa đưa phương trình về bậc 4 vì bản chất khi bình phương lên nó ra bậc 4 mà

Các em làm như phần anh hướng dẫn hệ khối B – 2014 để tìm 4 nghiệm (ở bài này có 2 thôi, sau khi tìm ra được 2 nghiệm các em sử dụng Vi-et đảo ra 1 phương trình bậc 2, lấy phương trình bậc 4 ban đầu chia cho phương trình bậc 2 này là được phương trình bậc 2 vô nghiệm còn lại nhé)

$3(x+1)\sqrt{2x+1}-2x^2=0$

$3(x+1)\sqrt{2x+1}=2x^2$

$\Rightarrow 9(x+1)^2(2x+1)=4x^4$

$\Leftrightarrow 9(x^2+2x+1)(2x+1)=4x^4$

$\Leftrightarrow 9(2x^3+5x^2+4x+1)=4x^4$

$\Leftrightarrow -4x^4+18x^3+45x^2+36x+9=0$

$\Leftrightarrow (x^2-6x-3)(-4x^2-6x-3)=0$

Từ đây ta thấy: $3(x+1)\sqrt{2x+1}-2x^2 \Leftrightarrow (x^2-6x-3)(-4x^2-6x-3)$

Vậy kết hợp với đề bài ta sẽ có $\Leftrightarrow (x-1)(x^2-6x-3)(-4x^2-6x-3)<0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-6x-3)>0$

Ta kết luận tương tự như trên

Tiếp theo là phần phương trình vô tỷ, vì là trong phần hệ anh đã nói kĩ phần giải phương trình vô tỷ ra nghiệm đẹp rồi và phương trình vô tỷ chỉ có 1 căn thức nghiệm xấu, bây giờ anh minh họa bài chứa 2 căn nhưng nghiệm xấu có thể coi là loại khó nhất người ta ra trong đề thi rồi, chứ nhiều căn mà có nghiệm đẹp như đề khối D-2014 thì quá đơn giản

***Giải phương trình vô tỷ của Sở Giáo Dục Bắc Ninh mới thi hôm 21/5**

Giải phương trình : $3\sqrt{5x+4}+3\sqrt{x+4}+4x^2-18x-12=0$

Anh nghĩ đây là dạng khó nhất người ta có thể ra rồi, chủ yếu anh đưa câu này vào để trình bày 3 kĩ thuật chính tìm phương trình chứa nghiệm xấu hoặc tìm biểu thức ghép liên hợp, chứ thi anh nghĩ không ra khó tới mức này.

Các em cứ đặt ĐK đàng hoàng đã : $x \ge -\dfrac{4}{5}$

Bấm máy thôi : các em nhập phương trình: $3\sqrt{5x+4}+3\sqrt{x+4}+4x^2-18x-12$ này vào, bấm dấu "=" để lưu lại đã

Tiếp theo các em bấm **Shift Solve 0 =**

Máy cho ra luôn nghiệm X = 0, ta cần tìm tất cả các nghiệm, như anh đã hướng dẫn ở đề kB 2014 đó

Sửa phương trình thành $(3\sqrt{5x+4}+3\sqrt{x+4}+4x^2-18x-12):X$

Tiếp theo các em bấm **Shift Solve =** được **X = 3,797…..**

Các em lưu nghiệm này vào A

Rồi lại sửa thành $(3\sqrt{5x+4}+3\sqrt{x+4}+4x^2-18x-12):X(X-A)$

Tiếp theo các em bấm **Shift Solve = =** cũng hơi lâu máy báo $X=1.10^{-50}$ **nghiệm này xấp xỉ nghiệm 0, tức là vô nghiệm.**

Vậy ta chỉ có 2 nghiệm thôi, làm sao để tìm được nghiệm lẻ nữa kết hợp với nghiệm lẻ kia để áp dụng Vi-et đảo, để tìm ra phương trình bậc 2 chứa nghiệm đó ???

Phương trình vô tỷ họ rất hay cho 1 nghiệm lẻ, 1 nghiệm đẹp, 1 nghiệm lẻ bị loại do điều kiện nhằm gây khó khăn cho chúng ta.

***Cách 1: Mò phương trình tạo ra nghiệm lẻ kia :**

Nghiệm đó là nghiệm của 1 phương trình bậc 2 nào đó luôn có dạng : $ax^2+bx+c=0$

Thông thường a =1, c nguyên nên chủ yếu là ta sẽ tìm b

Ta đã lưu nghiệm lẻ vào A, bây giờ ta lưu lại vào X bằng cách **RCL A Shift STO X**

Các em nhập như sau : $X^2+BX:B=B+1$

Nhập như sau : **Alpha X x^2 + Alpha B Alpha X Alpha : Alpha B Alpha = Alpha B + 1**

Sau đó bấm CALC :

Máy hiện **X? 3,79….** Các em ấn =

Máy hiện **B? …...** Các em ấn **-9 =**

Sau đó các em lại ấn **"="** cho tới khi nào các em nhìn thấy X^2+BX là một số nguyên

ở đây anh bấm được là $B=-3$ khi đó $X^2+BX=3$

Vậy ta có $x^2-3x-3=0$ là nhân tử cần tìm

Ta cũng cá thể dùng tính năng table cho nhanh các em vào: **Mode 7**

Máy hiện f(x)= các em nhập : A^2+XA (X sẽ chạy mà, A là nghiệm) rồi ấn =

Máy hiện Start ? các em bấm -9 = (bắt đầu)

Máy hiện End ? Các em bấm 9 = (Kết thúc)

Máy hiện Step ? Các em bấm 1 = (Bước nhảy ví dụ từ 2→3 thì bước nhảy là 1)

Nhìn vào bảng ta thấy luôn **X = -3** thì **f(x) = 3** vậy $f(x)=A^2-3A=3$

Vậy ta có $x^2-3x-3=0$ là nhân tử cần tìm

Nếu mà không có giá trị đẹp thì các em lại sửa thành : $2A^2+XA, 3A^2+XA, ...$ mò mà, keke, nhưng thường như anh nói thôi hệ số của x^2 là 1.

***Cách 2: Mò biểu thức để ghép liên hợp :** các bài toán về căn như trên thường là ghép liên hợp, nhưng vấn đề là ghép với số nào?

Dạng chính là : $\begin{cases}\sqrt{5x+4}=ax+b\\ \sqrt{x+4}=a'x+b'\end{cases}$ ta phải đi tìm a,b,a', b' như sau :

Ta có $\sqrt{5x+4}=ax+b$ (cái này để tí ghép liên hợp đó)

Ta lại mò $\sqrt{5x+4}-ax$ khi nào nguyên thì dừng, ở đây ta dò được ngay a = 1 , khi đó $\sqrt{5x+4}-ax=1$

Lưu ý là phải lưu nghiệm A = 3,79… sang nghiệm X =3,79… nhé xong bấm

Tương tự $\sqrt{x+4}-x=-1$

Vậy ta có $\sqrt{5x+4}-(x+1)=\dfrac{5x+4-(x^2+2x+1)}{\sqrt{5x+4}+(x+1)}=\dfrac{-(x^2+3x-3)}{\sqrt{5x+4}+(x+1)}$

$$\sqrt{x+4}-(x-1)=\frac{x+4-(x^2-2x+1)}{\sqrt{x+4}+(x+1)}=\frac{-(x^2-3x-3)}{\sqrt{x+4}+(x+1)}$$

Thấy lợi hại chưa các em, mới đầu cũng sẽ thấy hơi khó khăn

***Cách 3: Đảo dấu : Mò nghiệm ngoại lai $\to$ phương trình nhân tử**

Cơ sở của phương pháp này là khi ta nhân liên hợp, bình phương các kiểu ....
Bản chất vẫn là từ $\sqrt{a} \to a$ tức là $+\infty \to \infty$ cái này làm xuất hiện nghiệm ngoại lai, muốn lọai nghiệm nghoại lai ta kết hợp với ĐK ban đầu là vì vậy
Tức là trong quá trình bình phương hay nhân liên hợp vô tình tình đã tạo ra thêm phần tử âm từ 1 phần tử dương có giá triệt tuyệt đối như nhau nhưng khác dấu, hơi khó hiểu nhỉ

Tức là $2 \to 4\left\langle\begin{matrix}-2\\2\end{matrix}\right.$ hiểu đơn giản là như vậy

Bởi vậy muốn tìm nghiệm ngoại lai đó chỉ cần giải các phương trình ngoại lai, nghiệm ngoại lai chỉ có tác dụng hỗ trợ việc giải phương trình mà không phải là nghiệm chính thống.
Ta có ;

$\sqrt{5x+4} \to 5x+4\left\langle\begin{matrix}-\sqrt{5x+4}\\\sqrt{5x+4}\end{matrix}\right.$ và $\sqrt{x+4} \to x+4\left\langle\begin{matrix}-\sqrt{x+4}\\\sqrt{x+4}\end{matrix}\right.$

Nghiệm ngoại lai để mà kết hợp được với nghiệm **X = 3,797…..** ra đẹp sẽ là nghiệm của 1 trong số các phương trình ngại lai sau :

$$\begin{cases}-3\sqrt{5x+4}+3\sqrt{x+4}+4x^2-18x-12=0(1)\\3\sqrt{5x+4}-3\sqrt{x+4}+4x^2-18x-12=0(2)\\-3\sqrt{5x+4}-3\sqrt{x+4}+4x^2-18x-12=0(3)\end{cases}$$

Các em lần lượt bấm nghiệm của phương trình (1), (2), (3) ra rồi nhân với **X = 3,797….. đã lưu ở A xem cái nào đẹp là nhận.**

(1) có nghiệm : X=5,402… lưu vào B, nghiệm X = -0,5022…. Lưu vào C, có 2 nghiệm đó thôi thử tích AB, AC xem có đẹp không? Ko đẹp thì sang phương trình (2)

(2) có nghiệm **X=-0,7696**…… lưu vào B, nghiệm **X = -0,79128**…. Lưu vào C, nghiệm X **= 6,76**….. lưu vào D hết nghiệm rồi, bây giờ ta xét các tích AB,AC,AD

Thấy ngay tích AC = -3 thử A+C = 3

(3) Không cần giải nữa

Vậy ta có luôn phương trình chứa 1 nghiệm của phương trình ban đầu và nghiệm ngoại lai là $x^2-3x-3=0$

Trong các cách này anh thấy nhanh nhất là cách 2, nhưng cần nhậy bén 1 chút, trâu bò nhất là cách 3 nhưng mà chắc ăn, vừa vừa thì dùng cách 1 cũng được

Vậy là ta đã xác định được có nhân tử $x^2-3x-3=0$ bây giờ xác định lượng liên hợp cần ghép với các căn để ra được biểu thức này (đối với cách 1+3) chứ còn cách 2 thì xác định sẵn rồi còn đâu.
Dùng luôn kết quả của cách 2 ta ghép như sau :

$$3\sqrt{5x+4}+3\sqrt{x+4}+4x^2-18x-12=0$$

$$\Leftrightarrow 3[\sqrt{5x+4}-(x+1)]+3[\sqrt{x+4}-(x-1)]+4(x^2-3x-3)=0$$

$$\Rightarrow \frac{-3(x^2-3x-3)}{x+1+\sqrt{5x+4}}+\frac{-3(x^2-3x-3)}{x-1+\sqrt{x+4}}+4(x^2-3x-3)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-3x-3)\left(4-\frac{3}{x+1+\sqrt{5x+4}}-\frac{3}{x-1+\sqrt{x+4}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x-3=0 \\ g(x)=4-\dfrac{3}{x+1+\sqrt{5x+4}}-\dfrac{3}{x-1+\sqrt{x+4}}=0 \end{array}\right.$$

Ta có : $g'(x)=\dfrac{3}{\left(x+1+\sqrt{5x+4}\right)^2}\left(1+\dfrac{5}{2\sqrt{5x+4}}\right)+\dfrac{3}{\left(x-1+\sqrt{x+4}\right)^2}\left(1+\dfrac{1}{x-1+\sqrt{x+4}}\right)>0,\forall x\ge\dfrac{-4}{5}$

Mà $g(0)=0\rightarrow x=0$ là 1 nghiệm duy nhất của $g(x)$

Với : $x^2-3x-3=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{2}$ thử lại chỉ có nghiệm $x=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$ thỏa mãn

Vậy phương trình chỉ có 2 nghiệm là : $x=0$ và $x=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$

V,Tổng Kết

Đây là 1 phương pháp giúp ta định hướng nhanh mối quan hệ giữa x và y, rất thích hợp áp dụng với các phương pháp phân tích thành nhân tử, phương pháp hàm số và đánh giá…

Đặc biệt là khả năng sử dụng để giải phương trình, bất phương trình vô tỷ, phân tích phương trình bậc 4 thành nhân tử,…

Hi vọng sau tài liệu này các em sẽ có cái nhìn khác về Hệ Phương trình, đã rất nhiều em có phản hồi lại cho anh là em đã biết làm và làm rất tốt, em không còn thấy hệ phương trình khó nữa.

Facebook: https://www.facebook.com/toanmath

Chúc các em học tốt !!!

Tác giả : Nguyễn Thế Lực